3. Bayreuther Tag der Mathematik
Mathematikwettbewerb
12. Juli 2008

UNIVERSITÄT BAYREUTH

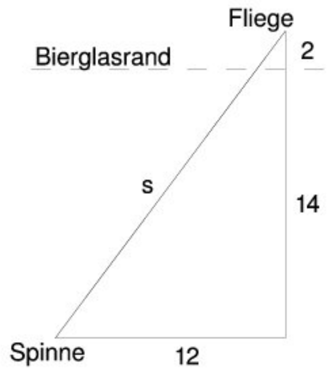
Klassenstufen 9 und 10

Bitte jeweils in Teams von 3 bis 5 Schülern bearbeiten. Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1:
Schritt 1: „Optimaler Weg ohne den Boden"

Könnte man das Bierglas aufschneiden und den Rand aufrollen, so würden sich Wege auf diesem dabei nicht verändern. Man stellt sich also das Bierglas am Ort der Spinne senkrecht aufgeschnitten und ausgerollt vor. „Klappt" man die dann die Außenseite des Bierglases nach oben, so sitzt von der Spinne aus gesehen die Fliege 12 cm seitlich und 16 cm weiter oben. Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten in der Ebene ist die Gerade und mit Pythagoras erhält man die gesuchte Strecke:

$$s = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

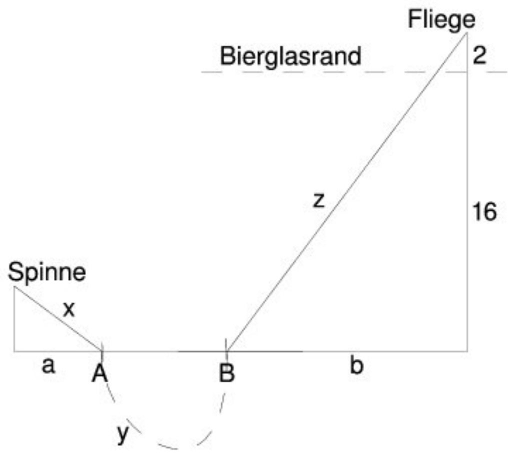


Schritt 2: „Es existiert kein schnellerer Weg über den Boden"

Angenommen die Spinne nimmt irgendeinen Weg über den Boden, so betritt sie diesen an einem Punkt A, bewegt sich eine Stecke $y > 0$ über den Boden zu einem Punkt B und läuft von dort aus nach oben in Richtung Fliege. Wie schon in Schritt 1 bemerkt, sind die kürzesten Wege vom Startpunkt der Spinne nach A und von B zum Ort der Fliege jeweils die Geradenabschnitte zwischen diesen Punkten. Damit ergäbe sich mit den Bezeichnungen wie in Zeichnung 2 eine gesamte Wegstrecke von mindestens

$$s = x + y + z = \sqrt{2^2 + a^2} + y + \sqrt{18^2 + b^2} > \sqrt{2^2} + \sqrt{18^2} = 20.$$

Damit kann ein solcher Weg nie besser sein als der in Schritt 1 gefundene und die Aufgabe ist gelöst.



10 Punkte

Aufgabe 2:
Angenommen eine Zahl q teilt eine Zahl p, so teilt auch jeder Teiler von q die Zahl p. Damit erhält man:

Angenommen $2 \nmid n \quad \Rightarrow \quad 4, 6, 8, 10, 12 \nmid n \quad \lightning$
Angenommen $3 \nmid n \quad \Rightarrow \quad 6, 9, 12 \nmid n \quad \lightning$
Angenommen $4 \nmid n \quad \Rightarrow \quad 4, 8, 12 \nmid n \quad \lightning$
Angenommen $5 \nmid n \quad \Rightarrow \quad 10 \nmid n \quad \lightning$

Also teilen $2, 3, 4$ und 5 und damit auch bereits $6, 10$ und 12 die Zahl. Da 13 und 11 keinen weiteren Nachbarn mehr haben, teilen diese ebenfalls n. Es bleiben also lediglich die beiden Möglichkeiten „7 und 8 teilen nicht“ und „8 und 9 teilen nicht“.

Im letzteren Fall gilt damit: $n = 22 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 60060 > 50000$ (also wieder falsch!!). Damit ist „7 und 8 teilen nicht“ die richtige Lösung und es gilt $n = 22 \cdot 32 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 25740$.

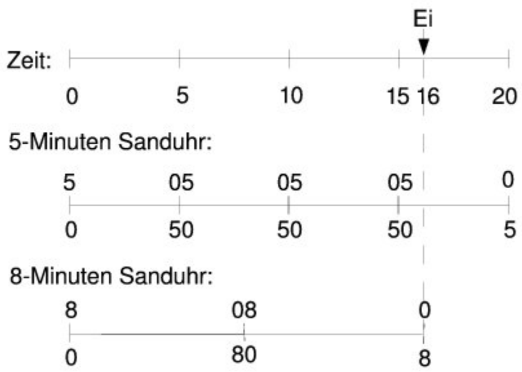
10 Punkte

Aufgabe 3:
Da jeder der Einwohner genau eine der angegebenen Eigenschaften besitzt, anwortet jeder edle Mensch bei den drei Fragen genau einmal mit „Ja“, nämlich wenn dies auch zutrifft. Jeder Lügner hingegen antwortet genau zweimal mit „Ja“, nämlich dann, wenn nach einer der beiden anderen Eigenschaften gefragt wird. Damit schlägt jeder Lügner genau zweimal zu Buche. Lügt also einer der Menschen mehr, so erhöht sich die Anzahl der positiven Antworten um eine. Damit enspricht die Differenz zwischen der Anzahl der positiven Antworten und der Anzahl der Bewohner genau der Anzahl der Lügner. Es lügen also $(1001 + 707 + 505) - 2008 = 2213 - 2008 = 205$ Menschen auf der Insel.

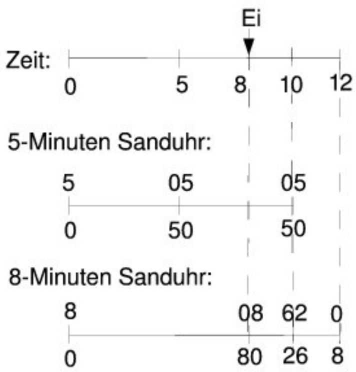
10 Punkte

Aufgabe 4:

(a) Erste Idee:



(b) In 12 Minuten:



(c) (Wir nehmen an, die Zündschnüre brennen zwar ungleichmäßig aber dennoch an jedem Punkt in beiden Richtungen gleich schnell.)
Zündet man eine Zündschnur an beiden Enden an, so brennt sie genau 30 Sekunden. Zündet man zum gleichen Zeitpunkt die zweite Zündschnur an nur einem Ende an, so würde diese noch 30 Sekunden brennen, wenn die erste gerade erloschen ist. Zündet man sie zu diesem Zeitpunkt am zweiten Ende an, so dauert es 15 Sekunden, bis sich die Flammen treffen und die Zündschnur erlischt. Insgesamt sind dann 45 Sekunden verstrichen.

20 Punkte