3. Bayreuther Tag der Mathematik
Mathematikwettbewerb
12. Juli 2008

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Klassenstufen 11 bis 13

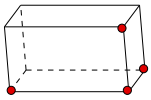
Bitte jeweils in Teams von 3 bis 5 Schülern bearbeiten. Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1:

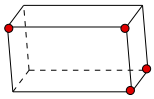
(a) Es gibt genau drei solche Parallelogramme. Sie entstehen, indem man je einen der gegebenen Punkte am Mittelpunkt der beiden anderen punktspiegelt.

(b) Sei M die Menge der Parallelepipede P, so dass die gegebenen vier Punkte unter den Eckpunkten von P vorkommen. Wir nennen eine Seitenfläche/Seitenebene von $P \in M$ *starr*, falls sie von gegebenen Punkten aufgespannt wird, und setzen $M_n = \{P \in M \mid P \text{ hat genau } n \text{ starre Seitenflächen}\}$ für alle nicht-negativen ganzen Zahlen n.

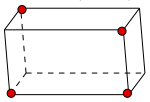
- Offensichtlich ist $M_n = \emptyset$ für $n \geq 4$.
- Die Abbildung, die einem $P \in M_3$ den Schnittpunkt der drei starren Seitenebenen von P zuordnet, liefert eine Bijektion zwischen M_3 und der Menge der gegebenen Punkte, d.h. $|M_3| = 4$.



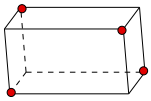
- $|M_2| = 12$, denn: Zwei starre Seitenflächen haben eine gemeinsame Kante AB. Jedes Paar gegebener Punkte kann die Rolle von AB einnehmen. Das gibt 6 Möglichkeiten. In jeder Situation hat man zwei Möglichkeiten A mit einem der beiden übrigen gegebenen Punkte zu verbinden.



- $P \in M_1$ besitzt genau eine starre Seitenfläche. Es gibt vier Möglichkeiten von den vier gegebenen Punkten drei auszuwählen. Der vierte Punkt liegt raumdiagonal einem der drei gegenüber, hierfür gibt es drei Möglichkeiten, also ist $|M_1| = 3 \cdot 4 = 12$.



- $P \in M_0$ ist eindeutig bestimmt: Durch jede Verbindungsgerade zweier gegebener Punkte zeichne man die Ebene parallel zur Verbindungsgerade der anderen beiden gegebenen Punkte. So erhält man alle Seitenebenen von P.



Nun sind die M_n paarweise disjunkt und vereinigen sich zu M, d.h. $|M| = \sum |M_n| = 4 + 12 + 12 + 1 = 29$.

20 Punkte

Aufgabe 2:
Ist x das Minimum der x_i, so gilt $x^2 \geq 2x$ nach Einsetzen in die entsprechende Gleichung mit x als linker Seite. Mit $x > 0$ folgt daraus $x \geq 2$. Ist y das Maximum der x_i, so ergibt sich analog $y \leq 2$. D.h. $x_1 = \cdots = x_{2008} = 2$, offensichtlich die einzige positive Lösung.

10 Punkte

Aufgabe 3:
Beim Zusammentreffen zweier Ameisen ändert sich die Situation nicht. (Vor dem Zusammentreffen läuft eine Ameise nach links und eine nach rechts, danach ebenso.) Also können wir die Problemstellung so abändern, dass die Ameisen aneinander vorbeilaufen. Für die optimale Lösung dieses Problems setzt man eine Ameise an ein Ende des Drahtes und lässt sie in Richtung des Drahtes starten. Somit dauert es eine Minute, bis alle Ameisen verschwinden. **10 Punkte**