3. Bayreuther Tag der Mathematik
Mathematikwettbewerb
12. Juli 2008

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Klassenstufen 11 bis 13

Bitte jeweils in Teams von 3 bis 5 Schülern bearbeiten. Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

Aufgabe 1:

(a) Gegeben seien drei Punkte in der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen. Wie viele Parallelogramme gibt es, die jeden der gegebenen Punkte als Eckpunkt besitzen?

(b) Gegeben seien vier Punkte im Raum, die nicht in einer Ebene liegen. Es gibt genau 29 Parallelepipede, die jeden der gegebenen Punkte als Eckpunkt besitzen. Begründen Sie warum.

Zur Erläuterung: Ein *Parallelepiped* (von griech. $\varepsilon\pi\acute{\iota}\pi\varepsilon\delta o$, *epipedo* = Fläche) ist ein räumlicher Körper, der von drei Paaren paralleler Ebenen begrenzt wird. Man bemerke die Analogie zum Parallogramm: Ein Parallelogramm wird (in der Ebene) durch zwei Paare paralleler Geraden begrenzt.

20 Punkte

Aufgabe 2:
Bestimme alle positiven Lösungen des Gleichungssystems

$$x_1^2 = x_2 + x_3, \quad x_2^2 = x_3 + x_4, \quad \ldots \quad x_{2007}^2 = x_{2008} + x_1, \quad x_{2008}^2 = x_1 + x_2.$$

10 Punkte

Aufgabe 3:
Auf einem 1 Meter langen geraden Draht befinden sich 100 Ameisen. Auf dein Kommando fangen sie an, sich gleichzeitig mit der Geschwindigkeit $1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{min}^{-1}$ entlang des Drahtes zu bewegen. Wenn 2 Ameisen sich treffen (sie können nicht aneinander vorbeilaufen), kehren sie um und laufen wieder auseinander, und wenn eine bis zu einem Ende des Drahtes kommt, fällt sie herunter. Die Frage ist nun, wie die Ameisen am Anfang sitzen müssen (also wo genau jede sitzen und in welche Richtung laufen muss), so dass die Zeit, bis die letzte herunterfällt, maximal ist? Die Ameisen sind so klein im Vergleich zur Länge des Drahtes, dass wir ihre Größe ignorieren können und sie als punktförmig betrachten.

10 Punkte

Viel Erfolg!