4. Bayreuther Tag der Mathematik
Mathematikwettbewerb
11. Juli 2009

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Klassenstufen 9 bis 10

Im Wettbewerb war die Aufgabenstellung zum Teil abgeändert. Insbesondere war der zweite Fall in Aufgabe 4 ausgeschlossen. Bewertet wurde neben Korrektheit auch die Qualität der Begründungen und der Beschreibungen der Lösungswege. Auch Ansätze wurden belohnt.

Aufgabe 1: Die Farbwechsel

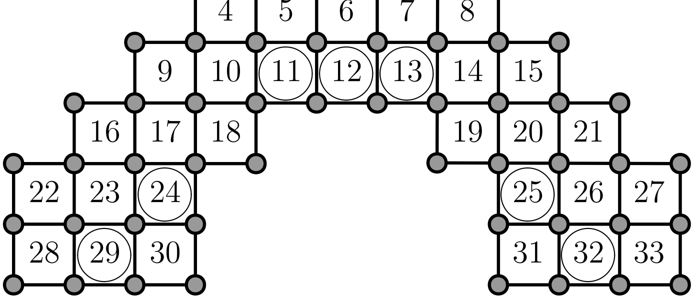
Wenn man gut Buch führt, kann man die Farbwechsel für die angegebene Reihenfolge herausfinden:
Am Schluss sind genau die Quadrate mit den folgenden Zahlen rot:

$$\mathbf{2, 11, 12, 13, 24, 25, 29, 32.}$$

Das gilt auch für jede andere Reihenfolge, muss dann aber bewiesen werden:
Wir können für jedes Feld bestimmen, wie oft es die Farbe wechselt. Genau einmal, wenn es genau ein Nachbarfeld hat (in eine der Richtungen rechts, links, oben, unten), genau zweimal, wenn es genau zwei solche Nachbarfelder hat, genau dreimal, wenn es genau drei solche Nachbarfelder hat, und genau viermal, wenn es genau vier solche Nachbarfelder hat. Das ist unabhängig von der Reihenfolge der Berührungen.
Nach einer geraden Anzahl von Farbänderungen ist ein Quadrat wieder blau. Um die Quadrate zu bestimmen, die am Schluss rot sind, muss man die Quadrate bestimmen, die genau eine ungerade Zahl von Nachbarn haben. Weil kein Quadrat nur einen Nachbarn hat, reicht es die Quadrate mit genau drei Nachbarn zu bestimmen

$$\mathbf{2, 11, 12, 13, 24, 25, 29, 32.}$$

Dies ist wie behauptet die gleiche Liste wie zuvor.



Aufgabe 2: Münzen

Wir behaupten, dass jede Person fünf Münzen bekommen hat.
Das ist sicherlich eine mögliche Lösung. Wir beweisen also unsere Behauptung, indem wir die Annahme, dass eine Person mehr als fünf Münzen hat, zum Widerspruch führen.
Sei n ($n > 5$) die größte Anzahl von Münzen, die eine Person besitzt. Betrachte alle Personen, die n Münzen besitzen. Das können nicht alle zehn Personen sein, weil es nur 50 Münzen gibt und $n > 5$ gilt. Wir wählen nun eine Person, die weniger als n Münzen hat. Wenn ihr rechter Nachbar auch weniger als n Münzen hat, dann betrachten wir diesen Nachbarn. Danach gehen wir solange zum rechten Nachbarn über, bis wir auf einen rechten Nachbarn stoßen, der n Münzen hat. Das muss irgendwann eintreten, da in der Tischrunde eine solche Person sitzt. Wir vergleichen nun die Anzahl n der Münzen dieser Person mit der Summe der Anzahl der Münzen ihrer Nachbarn.
Wegen der Art und Weise, wie wir unsere Person ausgewählt haben, hat der linke Nachbar weniger als n Münzen. Weil n die Maximalzahl von Münzen einer Person ist, hat der rechte Nachbar höchstens n Münzen, zusammen haben die Nachbarn also weniger als $2n$ Münzen. Der Aufgabentext sagt aber, dass jeder nicht mehr als halbsoviele Münzen hat, wie seine Nachbarn zusammen. Also hat die Person in der Mitte n Münzen und weniger als n Münzen. Das ist nicht möglich. Also ist unsere Behauptung durch Widerspruch gezeigt.

Aufgabe 3: Das Puzzle

Wir bezeichnen mit c die Seitenlänge des Quadrats. Weil die Fläche des Quadrats gleich der Fläche des Rechtecks ist, erhalten wir die Gleichung

$$c^2 = 5 * 3 = 15.$$

Im Rechteck betrachten wir das rechtwinklige Dreieck mit Ecke links oben. Die Hypothenusenlänge ist c, die Katheten habe die Längen 3 und x. Aus dem Satz des Phytagoras erhalten wir die Gleichung:

$$c^2 = x^2 + 3^2 = x^2 + 9.$$

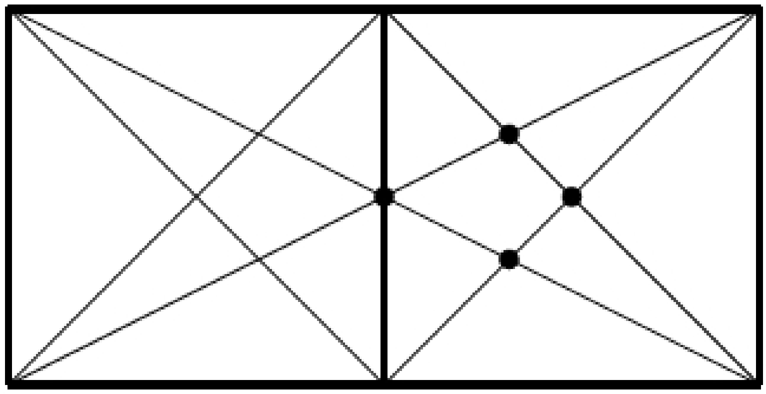
Wir können nun die erste Gleichung verwenden und damit die zweite umformen zu

$$x^2 = 15 - 9 = 6$$

Die gesuchte Länge ist daher die positive Quadratwurzel aus 6, also $\sqrt{6}$.

Aufgabe 4: Billiardtisch

Wir finden eine Anordnung mit 4 Kugeln, eine haben wir abgebildet:



Jetzt müssen wir noch zeigen, dass es nicht mit **3** Kugeln möglich ist. Das beweisen wir, indem wir die Annahme, dass 3 Kugeln ausreichen, zum Widerspruch führen.
Eine Anordnung mit Kugeln auf nur einer Geraden ist nicht möglich, da die Löcher nicht auf nur einer Geraden liegen. Haben wir eine Anordnung mit 3 Kugeln, so gibt es also drei Geraden in der Ebene, auf denen je zwei Kugeln liegen, und die drei Kugeln liegen auf den drei Schnittpunkten. Es gilt dann eine der folgenden Aussagen:

1. Jede Gerade trifft den Rand in zwei Punkten.

2. Mindestens eine Gerade liegt auf dem Rand.

1.Fall Damit alle Löcher auf dem Rand von einer der drei Geraden getroffen wird, darf kein Schnittpunkt auf dem Rand liegen, die drei Kugeln liegen also im Innern des Tisches.
Durch das Innere des Tisches verlaufen 9 Geraden, die je zwei Löcher enthalten. Je ein Loch eines solchen Paares liegt auf den beiden langen Seiten. Wenn man alle sechs Löcher auf drei solche Paare aufteilt, gibt es nur zwei Möglichkeiten: Entweder gehören die mittleren Löcher zu einem Paar, dann haben die drei Geraden nur den Mittelpunkt als Schnittpunkt, oder die mittleren Löcher bilden zwei Paare mit zwei Löchern, die sich diagonal gegenüberliegen, dann sind die zugehörigen zwei Geraden parallel, und es gibt keine drei Schnittpunkte der drei Geraden, auf denen die Kugeln liegen können. Damit ist dieser Fall ausgeschlossen.

2.Fall Es kann nur ein Gerade auf dem Rand liegen, da auf jedem Schnittpunkt von Geraden eine Kugel liegen muss. Die beiden anderen Geraden schneiden den Rand also wie in Fall 1 in je zwei Punkten. Da auf den Schnittpunkten mit der Geraden auf dem Rand Kugeln liegen, kann nur höchstens einer dieser Punkte ein Loch sein. Auf diesen zwei Geraden liegen also nur zwei Löcher. Weil auf der Gerade auf dem Rand aber keine vier Löcher liegen können ist auch dieser zweite Fall ausgeschlossen.