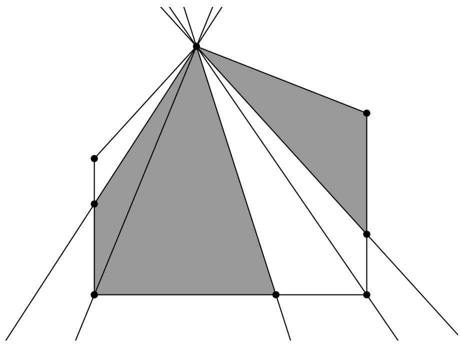
4. Bayreuther Tag der Mathematik
Mathematikwettbewerb
11. Juli 2009

Klassenstufen 11 bis 13

Im Wettbewerb wurde neben Korrektheit auch die Qualität der Begründungen und der Beschreibungen der Lösungswege bewertet. Auch Ansätze wurden belohnt.

Aufgabe 1: Das Fünfeck

Wir fügen zur Abbildung noch zwei weitere Geraden durch den Geradenschnittpunkt und die Eckpunkte mit rechtem Winkel hinzu.



Jetzt können wir die Flächeninhalte von benachbarten Paaren von Dreiecken betrachten. Das Verhältnis der Flächeninhalte für die beiden Dreiecke mit waagerechter Grundlinie ist gleich dem Verhältnis der beiden Grundlinie, weil die Höhe, d.h. der Abstand der Spitze von der Grundlinie für beide Dreiecke gleich ist. Nach Aufgabenstellung ist das Verhältnis der Grundlinienlängen wie 2 zu 1. Das gleiche Argument kann man für die beiden anderen Dreieckspaare benutzen. Aus der Information über den Flächeninhalt der grauen Fläche und unserem Ergebnis, dass diese Fläche doppelt so groß wie die weiße Fläche ist, folgern wir, dass die weiße Fläche im Pentagon 50 Flächeneinheiten groß ist.

Alternative. Wir führen ein Koordinatensystem ein mit Ursprung im linken unteren Eck. Die Länge der Seite links sei $\boldsymbol{a}$, die der Grundlinie $\boldsymbol{b}$ und die der Seite rechts $\boldsymbol{c}$. Die Koordinaten der Ecke über der Grundlinie seien $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Dann habe die Punkte auf dem Rand des Fünfecks die Koordinaten

$$\boldsymbol{(0,0), (2b/3, 0), (b, 0), (b, c/3), (b, c), (x, y), (0, a), (0, 2a/3).}$$

Die Höhe von $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ über der linken Seite ist dann $\boldsymbol{x}$, die über der Grundlinie $\boldsymbol{y}$ und die über der rechten Seite $\boldsymbol{b - x}$, wobei diese Zahlen alle positiv sind. Die Flächen lassen sich dann berechen und wir erhalten:

$$\boldsymbol{a/3 * x + b/3 * y + c/3 * (b - x)} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\frac{1}{2}\Big(a/3 * x + b/3 * y + c/3 * (b - x)\Big)}$$

für die graue bzw. die weiße Fläche. Die weiße Fläche ist also halb so groß und damit 50 Flächeneinheiten groß.

Aufgabe 2: Streichholzhaufen

Da alle drei Haufen eine ungerade Anzahl von Streichhölzern enthalten, ist zu Beginn nur der erste Zug erlaubt.
Wir haben nach dem ersten Zug also zwei Haufen mit 72 und 33 oder zwei Haufen mit 65 und 40, oder zwei Haufen mit 98 und 7 Streichhölzern. In jedem Fall gilt, nämlich für $p = 3$, $p = 5$ bzw. $p = 7$

$(*)$ Eine ungerade Primzahl p teilt die Anzahl der Streichhölzer jedes Haufens.

Wir beweisen nun, dass die Eigenschaft $(*)$ durch erlaubte Züge nicht verloren geht:

1. Werden zwei Haufen zusammengelegt, so teilte p die Anzahl beider Haufen also auch deren Summe, die Anzahl des neuen Haufens. Natürlich teilt p immer noch die Anzahlen der unbeteiligten Haufen.

2. Wird ein Haufen mit gerader Anzahl genau halbiert, so enthält die Primfaktorzerlegung der neuen Anzahl die gleichen ungeraden Primfaktoren, insbesondere auch p, wie die Anzahl des alten Haufens. Man verliert nur einen Primfaktor 2. Also sind auch die Anzahlen der zwei halben Haufen durch p teilbar. Natürlich teilt p immer noch die Anzahlen der unbeteiligten Haufen.

Die Aufteilung von 105 Streichhölzern auf 105 Haufen mit je einem Streichholz hat die Eigenschaft $(*)$ weder bezüglich $p = 3$, noch $p = 5$, noch $p = 7$. Da jede Aufteilung, die man aus der Ausgangssituation durch erlaubte Züge erreichen kann, die Eigenschaft $(*)$ hat, muss die Frage mit *Nein* beantwortet werden.

Aufgabe 3:

Wir beantworten die allgemeine Fragestellung. Dazu fixieren wir eine ungerade natürliche Zahl n und bemerken, dass drei natürliche Zahlen $l \leq m \leq n$ genau dann ein Dreieck mit Seitenlängen l, m, n darstellen, wenn $l + m > n$ oder gleichbedeutend $l + m \geq n + 1$ gilt. Insbesondere ist für jedes Dreieck, gegeben durch l, m, n, $2m \geq l + m \geq n + 1$, also $m \geq (n+1)/2$. Wir schreiben n_0 für $(n+1)/2$. Dann gibt es bei festem m, $n_0 \leq m \leq n$, gerade so viele Dreiecke wie Zahlen l zwischen $n + 1 - m$ und m, sprich $2m - n$ Stück. Die gesuchte Anzahl an Dreiecken ist demnach gleich der Summe

$$(2n_0 - n) + (2(n_0 + 1) - n) + \ldots + (2n - n) = 1 + 3 + \ldots + n$$

der ungeraden Zahlen von 1 bis n. Etwa durch vollständige Induktion (siehe Lösung Aufgabe 4) beweist man die Identität

$$1 + 3 + \ldots + n = ((n + 1)/2)^2.$$

Speziell für $n = 9$ ergibt sich die gesuchte Anzahl zu $((9 + 1)/2)^2 = 25$.

Aufgabe 4:

Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{guT(k)}$ den größten ungeraden Teiler der positiven ganzen Zahl $\boldsymbol{k}$. Offensichtlich gilt $\boldsymbol{guT(k) \leq k}$.
Sei nun $\boldsymbol{k < l}$: Angenommen $\boldsymbol{guT(k) = guT(l)}$. Dann enthält $\boldsymbol{l}$ den Primfaktor $\mathbf{2}$ in höherer Potenz als $\boldsymbol{k}$ ihn enthält. Also folgt $\boldsymbol{l \geq 2k}$.
Umgekehrt folgt aus $\boldsymbol{k < l < 2k}$, dass $\boldsymbol{guT(k)}$ und $\boldsymbol{guT(l)}$ verschieden sind.
Dieser Fall tritt insbesondere für $\boldsymbol{n < k < l \leq 2n}$ ein, da dann gilt $\boldsymbol{2k > 2n \leq l}$ also $\boldsymbol{2k > l}$.
Die Zahlen $\boldsymbol{guT(k)}$ für $\boldsymbol{k = n+1, n+2, ..., 2n}$ sind also alle verschieden und sie sind alle ungerade.
Schließlich sind sie auch alle kleiner als $\boldsymbol{2n}$ wegen $\boldsymbol{guT(k) \leq k \leq 2n}$.
Wir folgern dass in der Summe der größten ungeraden Teiler jede ungerade Zahl kleiner als $\boldsymbol{2n}$ genau einmal vorkommt.
Sie stimmt also mit der Summe $\boldsymbol{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}$ überein.
Diese Summe hat den Wert $\boldsymbol{n^2}$, wie man leicht mit vollständiger Induktion beweist:

1. $\boldsymbol{1 = 1^2}$ ist wahr.
2. $\boldsymbol{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2}$